Université Abdelmalek Essaadi , ENSA Al Hoceima,
$1^{ère}$ Année Préparatoire , 2019-2020.

Devoir Surveillé d'Algébre de Base.
Durée : 1h30.

Exercice 1 : (7 pt)

1. Montrer l'assertion suivante : $\forall A, B, C \in P(E)$
$$(A \cap B = A \cap C) \text{ et } (A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$$
2. Soit X un ensemble. Pour $f \in F(X, X)$, on définit $f^0 = Id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \, o \, f$.

   Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}, (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$
3. On définit sur une partie E de $\mathbb{R}$ la relation $\mathbf{T}$ par :
$$x \, \mathbf{T} \, \mathbf{y} \Leftrightarrow x\, e^y = y\, e^x$$
   (a) Montrer que $\mathbf{T}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner la classe d'équivalence de $\mathbf{T}$.
   (c) Donner un exemple d'une relation d'ordre partiel. Justifiez ?

Exercice 2 : (6 pt)

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; et h définie par
$$\begin{array}{ccc} h & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x & \to & (f(x), g(x)) \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g sont injectives alors h est injective.
2. On suppose dans cette question que $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
   Les applications f, g et h sont elles injectives ? Que peut on en déduire ?
3. Montrer que si h est surjective alors f et g sont surjectives.

Exercice 3 : (7 pt)

On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de composition internes o et T par :
$$x \, o \, y = x + y + 1 \quad \text{et} \quad x \, T \, y = xy + x + y$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, o)$ est un groupe abélien.
2. Donner en exemple de sous groupe de $(\mathbb{R}, o)$. Justifier ?
3. Montrer que $(\mathbb{R}, o, T)$ est un anneau commutatif.
4. Prouver que l'application
$$\begin{array}{cccc} \varnothing : & (\mathbb{R}, o, T) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +, \times) \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$
   est un isomorphisme d'anneaux.
5. Déduire que $(\mathbb{R}, o, T)$ est un corps commutatif.

Pr. ABOUELHANOUNE